วิธีเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

ชื่อ .... ชั้น .... เลขที่ ....

1 ปรีชามีเสื้อ 4 ตัวแตกต่างกัน มีกางเกง 3 ตัวแตกต่างกัน จงหาว่าปรีชาจะมีวิธีแต่งกาย จากชุดที่กำหนดให้ได้กี่วิธี

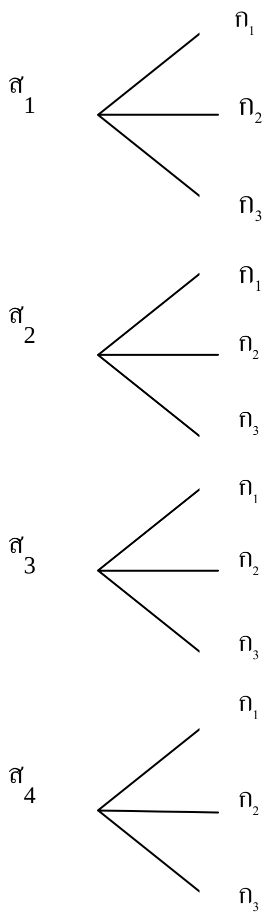
วิธีทำ ให้ ส$_1$, ส$_2$, ส$_3$, ส$_4$ แทน เสื้อตัวที่หนึ่งถึงเสื้อตัวที่สี่

ก$_1$, ก$_2$, ก$_3$ แทน กางเกงตัวที่หนึ่งถึงเสื้อตัวที่สาม

สามารถจับคู่เสื้อและกางเกง ดังนี้

ส$_1$ ก$_1$, ส$_1$ ก$_2$, ส$_1$ ก$_3$, ส$_2$ ก$_1$, ส$_2$ ก$_2$, ส$_2$ ก$_3$, ส$_3$ ก$_1$, ส$_3$ ก$_2$, ส$_3$ ก$_3$, ส$_4$ ก$_1$, ส$_4$ ก$_2$, ส$_4$ ก$_3$

อาจใช้แผนภาพต้นไม้แสดงการจับคู่เสื้อและกางเกง ดังนี้



จะสังเกตได้ว่า สามารถหาจำนวนวิธีแต่งกายจากชุดที่กำหนดให้ได้โดยการคูณ คือ นำจำนวนชุดของเสื้อคูณจำนวนชุดของกางเกง จะได้ $4 \times 3 = 12$ วิธี

กฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ (The fundamental principle of counting) หรือเรียกว่ากฎการคูณ (multiplication rule) กำหนดดังนี้

กฎข้อที่ 1

ถ้าสามารถทำงานอย่างแรกวิธีต่างๆ ได้ n_1 วิธี และแต่ละวิธีของการทำงานอย่างแรก สามารถทำงานอย่างที่สองวิธีต่างๆ ได้ n_2 วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกทำงานอย่างที่หนึ่งตามด้วยการทำงานอย่างที่สอง สามารถทำวิธีต่างๆ ได้ $n_1 n_2$ วิธี

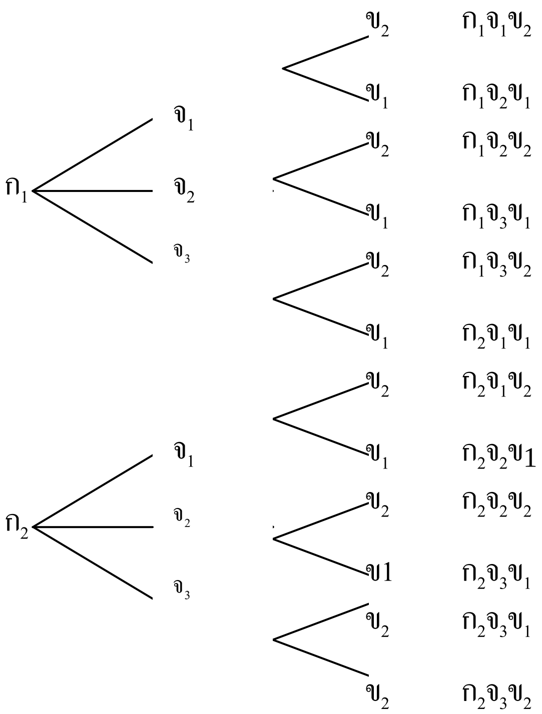
2 ในการเลือกรับประทานอาหารประเภทละหนึ่งอย่าง จากอาหารสามประเภท คือมีแกงอยู่ 2 อย่าง มีต้มจืดอยู่ 3 อย่าง และมีขนมหวานอยู่ 2 อย่าง จะมีวิธีเลือก รับประทานได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ให้ ก$_1$, ก$_2$ แทน แกงอย่างที่หนึ่งและอย่างที่สองตามลำดับ

จ$_1$, จ$_2$, จ$_3$ แทน ต้มจืดอย่างที่หนึ่งถึงอย่างที่สามตามลำดับ

ข$_1$, ข$_2$ แทน ขนมอย่างที่หนึ่งและอย่างที่สองตามลำดับ

วิธีเลือกรับประทานอาหารประเภทละหนึ่งอย่าง พิจารณาได้จากแผนภาพต้นไม้ ดังนี้



ซึ่งจะได้ 12 วิธี คือ

ก$_1$ จ$_1$ ข$_1$, ก$_1$ จ$_1$ ข$_2$, ก$_1$ จ$_2$ ข$_1$, ก$_1$ จ$_2$ ข$_2$, ก$_1$ จ$_3$ ข$_1$, ก$_1$ จ$_3$ ข$_2$

ก$_2$ จ$_1$ ข$_1$, ก$_2$ จ$_1$ ข$_2$, ก$_2$ จ$_2$ ข$_1$, ก$_2$ จ$_2$ ข$_2$, ก$_2$ จ$_3$ ข$_1$, ก$_2$ จ$_3$ ข$_2$

วิธีเลือกทั้งหมดพิจารณาได้จากการทำงานสามงาน คือ

1) มีวิธีเลือกแกงได้ 2 วิธี

2) แต่ละวิธีของการเลือกแกงจะมีวิธีเลือกต้มจืดได้ 3 วิธี

3) แต่ละวิธีของการเลือกแกง และเลือกต้มจืดจะมีวิธีเลือกขนมหวานได้ 2 วิธี

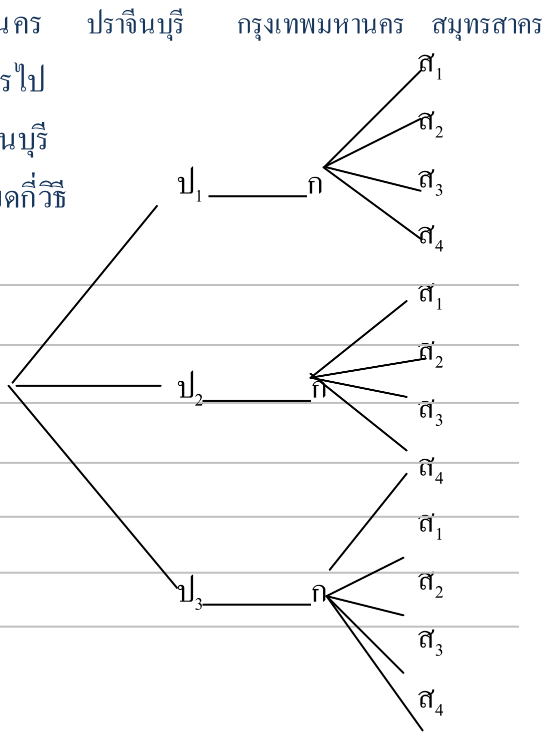
ดังนั้น จะมีวิธีเลือกทั้งหมด เป็น $2 \times 3 \times 2 = 12$ วิธี

กฎข้อที่ 2

ถ้าสามารถทำงานอย่างแรกวิธีต่างๆ ได้ n_1 วิธี แต่ละวิธีของการทำงานอย่างแรกสามารถทำงานอย่างที่สองวิธีต่างๆ ได้ n_2 วิธี และแต่ละวิธีของการทำงานอย่างแรก และอย่างที่สองสามารถทำงานอย่างที่สามต่างๆ กันได้ n_3 วิธี ... เป็นเช่นนี้ถึงการทำงานอย่างที่ k ซึ่งสามารถทำงานวิธีต่างๆ กันได้ n_k วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกทำงานอย่างแรกตามด้วยการทำงานอย่างที่สอง ตามด้วยการทำงานอย่างที่สาม ... จนถึงการทำงานอย่างที่ k สามารถทำวิธีต่างๆ ได้ $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ วิธี

ตรวจสอบความก้าวหน้า 1

1. ถ้ามีวิธีเดินทางจากปราจีนบุรีไปกรุงเทพมหานคร ได้ 3 วิธี และมีวิธีเดินทางจากกรุงเทพมหานครไปสมุทรสาครได้ 4 วิธี จะมีวิธีเดินทางจากปราจีนบุรีผ่านกรุงเทพมหานครไปสมุทรสาครได้ทั้งหมดกี่วิธี



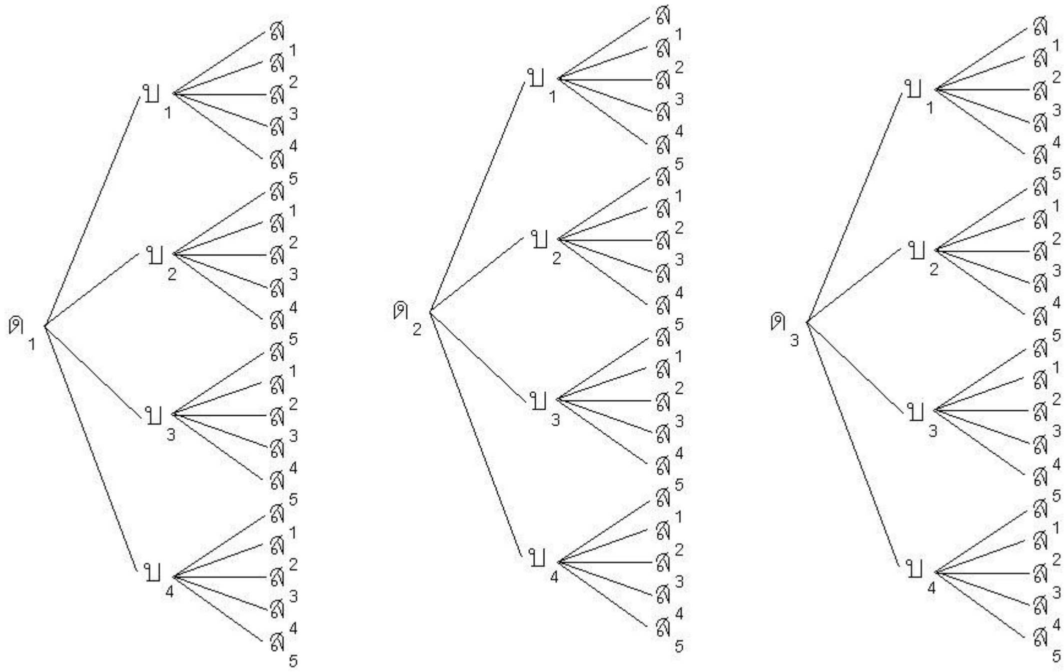
เส้นทางมีได้ทั้งหมด 12 เส้นทาง คือ

ป$_1$ส$_1$, ป$_1$ส$_2$,ป$_1$ส$_3$, ป$_1$ส$_4$,

ป$_2$ส$_1$, ป$_2$ส$_2$,ป$_2$ส$_3$, ป$_2$ส$_4$,

ป$_3$ส$_1$, ป$_3$ส$_2$,ป$_3$ส$_3$, ป$_3$ส$_4$

2. มีดินสอแตกต่างกัน 3 แท่ง ไม้บรรทัดแตกต่างกัน 4 อัน และสมุดแตกต่างกัน 5 เล่ม ถ้าต้องการเลือกดินสอ ไม้บรรทัด และสมุดอย่างละ 1 เล่ม จะมีวิธีเลือกต่างๆ กัน ได้กี่วิธี



มีวิธีเลือกต่าง ๆ กันได้ $3 \times 4 \times 5 = 60$

3 สถาบันทดสอบความพร้อมเพื่อเข้าเรียนต่อในมหาวิทยาลัยได้กำหนดรหัสของ นักศึกษาด้วยอักษรภาษาไทย 1 ตัว และตามด้วยตัวเลขสี่ตัว สถาบันจะมีวิธีกำหนดรหัสของผู้เข้าสอบได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี ถ้า

1) ไม่มีข้อกำหนดใดๆ เพิ่มเติม

2) ห้ามออกบัตรที่ตัวเลขเป็นศูนย์พร้อมกันทั้งสี่หลัก

วิธีทำ 1) ไม่มีข้อกำหนดใดๆ เพิ่มเติม ดังนั้นการจัดรหัสจะเหมือนกับการทำงาน 5 ขั้นตอน

ขั้นที่หนึ่ง มีวิธีเลือกอักษรภาษาไทยได้ 44 วิธี

ขั้นที่สองถึงขั้นที่ห้า มีวิธีเลือกตัวเลขได้ ขั้นตอนละ 10 วิธี

ดังนั้น จะออกรหัสได้ทั้งหมด $44 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 440{,}000$ วิธี

2) กรณีที่ออกบัตรที่ตัวเลขเป็นศูนย์พร้อมกันทั้งสี่หลักมีวิธีออกบัตรได้

$$44 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 44 \text{ วิธี}$$

ดังนั้น กรณีที่ออกบัตรที่ตัวเลขไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งสี่หลักจะมีวิธีออกบัตรได้

$$440{,}000 - 44 = 439{,}956 \text{ วิธี}$$

ตรวจสอบความก้าวหน้า 2

สถาบันทดสอบศักยภาพทางภาษาอังกฤษของสถาบันแห่งหนึ่งมีวิธีกำหนดรหัสประจำตัวของผู้เข้าสอบด้วยอักษรภาษาอังกฤษ 2 ตัว และตามด้วยตัวเลขอีก 4 ตัว สถาบันจะมีวิธีกำหนดรหัสของผู้เข้าเรียนได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี ถ้า

1. ไม่มีข้อกำหนดใดๆ เพิ่มเติม

$$\underbrace{\square\ \square}_{\text{อักษรภาษาอังกฤษ}} \qquad \underbrace{\square\ \square\ \square\ \square}_{\text{ตัวเลข}}$$

วิธีกำหนดรหัสได้แตกต่างกัน $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

$= 6{,}760{,}000$ วิธี

จำนวนวิธีที่ออกบัตรที่ตัวเลขเป็นศูนย์พร้อมกันทั้งสี่ตัวเป็น

$= 26 \times 26 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 676$ วิธี

ดังนั้น วิธีที่ออกบัตรตัวเลขไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งสี่ตัวเป็น

$6{,}760{,}000 - 676 = 6{,}759{,}324$ วิธี

แบบฝึกหัด 1.1

1. มีเส้นทางจากตำบล ก ไปตำบล ข อยู่ 4 เส้นทาง มีเส้นทางจากตำบล ข ไปตำบล ค อยู่ 3 เส้นทาง ถ้าเดินทางจากตำบล ก ไปยังตำบล ค โดยผ่านตำบล ข จะมีเส้นทางการเดินทางแตกต่างกันได้กี่วิธี

   จากตำบล ก ไปตำบล ข มี 4 เส้นทาง

   จากตำบล ข ไปตำบล ค มี 3 เส้นทาง

   ดังนั้น จะมีการเดินทางแตกต่างกัน $4 \times 3 = 12$

   …

2. เพ็ญศรีมีกระโปรง 4 ตัว มีเสื้ออยู่ 5 ตัว และเข็มขัด 2 เส้น จะมีวิธีแต่งตัวแตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

   มีกระโปรงอยู่ 4 ตัว .

   มีเสื้ออยู่ 5 ตัว .

   มีเข็มขัด 2 เส้น .

   จากกฎข้อที่ 2 วิธี จะมีวิธีแต่งตัวแตกต่างกันได้ทั้งหมด $4 \times 5 \times 2 = 40$ วิธี______.

3. มีเรือข้ามฟากระหว่างท่าน้ำราษฎร์บูรณะและท่าน้ำสะพานสูงอยู่ 8 ลำ ถ้าสมนึกต้องการข้ามฟากไปและกลับระหว่างท่าน้ำราษฎร์บูรณะและท่าน้ำสะพานสูง โดยขากลับจะไม่ขึ้นซ้ำเรือลำเดียวกับขาไป สมนึกจะมีวิธีใช้เรือข้ามฟากได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีเลือกเรือข้ามฟากขาไปได้ 8 วิธี

วิธีเลือกเรือข้ามฟากขากลับได้ 7 วิธี (เลือกขาไปไปแล้ว 1 ลำ $\therefore$ 8 – 1 = 7)

มีวิธีใช้เรือข้ามฟากได้ทั้งหมด $8 \times 7 = 56$ วิธี

4. บริษัทผลิตรถยนต์แห่งหนึ่ง ต้องการผลิตรถยนต์4 แบบ แต่ละแบบมีสีอยู่ 5 สี ถ้าจะจัดห้องแสดงรถยนต์ทุกแบบทุกสีอย่างละหนึ่งคัน จะต้องจัดที่จอดรถทั้งหมดกี่ที่

ผลิตรถยนต์ 4 แบบ

แต่ละแบบมีสีอยู่ 5 สี

จะต้องจัดที่จอดแสดงรถยนต์ทั้งหมด $4 \times 5 = 20$ ที่

5. บัตรพนักงานประกอบด้วยตัวอักษรในภาษาไทย 2 ตัว และตัวเลข 3 ตัว สามารถออกบัตรให้พนักงานได้แตกต่างกันกี่วิธี ถ้า

1) ไม่มีข้อจำกัดอื่น

$$\underbrace{\boxed{44}\ \boxed{44}}_{\text{อักษรภาษาไทย}} \qquad \underbrace{\boxed{10}\ \boxed{10}\ \boxed{10}}_{\text{ตัวเลข}}$$

ออกบัตรพนักงานแตกต่างกันได้ $44 \times 44 \times 10 \times 10 \times 10$

$= 1{,}936{,}000$ วิธี

2) ถ้าไม่ใช่ตัวเลขเป็นศูนย์ทั้งสามหลักพร้อมกัน

ถ้าออกบัตรโดยใช้ตัวเลขเป็นศูนย์ทั้งสามหลักพร้อมกันจะออกบัตรได้

$44 \times 44 \times 10 \times 10 \times 10 = 1{,}936$ วิธี

ดังนั้น วิธีออกบัตรที่ตัวเลขไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งสามหลักเป็น

$1{,}936{,}000 - 1{,}936 = 1{,}934{,}064$ วิธี

6. อาหารปิ่นโตเสนอรายการอาหาร ดังนี้ แกง 3 ชนิดแตกต่างกัน ต้มจืด 4 ชนิดแตกต่างกัน ผัดผัก 2 ชนิดแตกต่างกัน และขนมหวาน 5 ชนิดแตกต่างกัน ถ้าผู้สั่งอาหารปิ่นโตแต่ละ รายเลือกแกงได้หนึ่งอย่าง

ต้มจืดหนึ่งอย่าง ผัดผักหนึ่งอย่าง และขนมหวานหนึ่งอย่าง จะมีวิธีเลือกรายการอาหารต่างๆ ได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีเลือกรายการอาหารวิธีต่าง ๆ ได้ทั้งหมด $3 \times 4 \times 2 \times 5 = 120$ วิธี

7. มีหนังสือคณิตศาสตร์แตกต่างกัน 3 เล่ม วิทยาศาสตร์แตกต่างกัน 4 เล่ม ภาษาอังกฤษ แตกต่างกัน 6 เล่ม และภาษาไทยแตกต่างกัน 5 เล่ม ในการเลือกหนังสือวางบนโต๊ะชุดหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วยคณิตศาสตร์หนึ่งเล่ม วิทยาศาสตร์หนึ่งเล่ม ภาษาอังกฤษหนึ่งเล่ม และ ภาษาไทยหนึ่งเล่ม จะมีวิธีเลือกต่างๆ กันได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีเลือกต่าง ๆ กัน ได้ทั้งหมด $3 \times 4 \times 6 \times 5 = 360$ วิธี

8. มีวิธีที่จัดคน 8 คนให้นั่งเก้าอี้ที่วางอยู่เป็นแถวจำนวน 4 ตัว ได้กี่วิธี โดยในแต่ละวิธีจะมีคน ไม่ได้นั่งสี่คน

ตำแหน่ง $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$.

ในตำแหน่งที่ 1 มีวิธีเลือกคนให้นั่งได้ 8 วิธี ตำแหน่งที่ 2 มีวิธีเลือกได้ 7 วิธี

ในตำแหน่งที่ 3 มีวิธีเลือกได้ 6 วิธี ตำแหน่งที่ 4 มีวิธีเลือกได้ 5 วิธี

วิธีจัดคนให้นั่งได้ทั้งหมด $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1{,}650$ วิธี

9. ถ้าโยนลูกเต๋าสองลูก เราจะใช้คู่อันดับแสดงหน้าที่แต้มปรากฏของลูกเต๋าลูกที่หนึ่ง และลูกเต๋าลูกที่สอง เช่น (4, 2) บอกให้ทราบว่าลูกเต๋าลูกที่หนึ่งขึ้นหน้า 4 แต้ม และลูกเต๋าลูกที่สอง ขึ้นหน้า 2 แต้ม ดังนั้นเมื่อโยนลูกเต๋าสองลูก จะมีคู่อันดับแสดงหน้าที่ปรากฏต่างๆ กันทั้งหมดกี่วิธี อะไรบ้าง

มี $6 \times 6 = 36$ คู่อันดับ ดังนี้ (1,1) , (1,2) ,(1,3) ,(1,4) , (1,5) , (1,6) , (2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) , (3,1) ,(3,2) ,(3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6) , (4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) ,(4,5) , (4,6),(5,1) ,(5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6) , (6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) ,(6,6)_______________.

10. ในการทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมๆ กัน จงหาจำนวนวิธีที่จะได้เหตุการณ์ดังนี้

1) ผลรวมของแต้มเท่ากับ 8

$$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$.

. มีจำนวนวิธีที่จะได้เหตุการณ์ดังกล่าว 5 วิธี

มีจำนวนวิธีที่จะได้เหตุการณ์ดังกล่าว 5 วิธี

2) ผลรวมของแต้มมากกว่า 8

$$\{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

มีจำนวนวิธีที่จะได้เหตุการณ์ดังกล่าว 10 วิธี

. 11. หาจำนวนหมายเลขโทรศัพท์ที่ใช้ตัวเลข 9 ตัว เมื่อหมายเลขตัวที่หนึ่งเป็น 0 และหมายเลข ตัวที่สองเป็นตัวเลข 1 และตัวเลข 7 หลัก

1) ตัวเลขที่เหลือไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งเจ็ดตัว

$$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$$

หมายเลขที่เหลือเป็นศูนย์พร้อมกันทั้งเจ็ดตัว เป็น $1\times1\times1\times1\times1\times1\times1 = 1$ วิธี

ตัวเลขที่เหลือไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งเจ็ดตัว

$(10\times10\times10\times10\times10\times10\times10) - 1 = 9{,}999{,}999$ วิธี

2) ตัวเลขที่เหลือไมใช้ตัวเลขซ้ำ

$$\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$$

$10\times9\times8\times7\times6\times5\times4$

วิธีทั้งหมด $10\times9\times8\times7\times6\times5\times4 = 604{,}800$ วิธี

12. จงหาว่า

1) จำนวนเต็มบวกซึ่งมีหกหลักมีทั้งหมดกี่จำนวน

$$\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$$

$9\times10\times10\times10\times10\times10$

จำนวนทั้งหมด $9\times10\times10\times10\times10\times10 = 900{,}000$ วิธี

2) จำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนคี่ซึ่งมีหกหลักมีกี่จำนวน

หลัก แสน หน่วย

$$\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$$

วิธีทั้งหมด $9\times10\times10\times10\times10\times5$

จำนวนทั้งหมด $9\times10\times10\times10\times10\times5 = 450{,}000$ วิธี

3) จำนวนเต็มบวกซึ่งมีหกหลัก และหลักหน่วยเป็น 9 มีทั้งหมดกี่จำนวน

หลัก แสน หน่วย

$$\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$$

วิธีทั้งหมด $9\times10\times10\times10\times10\times1$

จำนวนทั้งหมด $9\times10\times10\times10\times10\times1 = 90{,}000$ วิธี

2 แฟกทอเรียล (Factorial)

สำหรับจำนวนเต็มบวก n n แฟกทอเรียล [หรือแฟกทอเรียล n] (n factorial) เขียนแทนด้วย n! คือผลคูณของจำนวนนับ n จำนวนแรก แฟกทอเรียลศูนย์ กำหนดให้เป็น 1 โดยมี สัญลักษณ์

n แฟกทอเรียล

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3 \times 2 \times 1$

$1! = 1$

$0! = 1$

สังเกตว่า

$n! = n(n-1)!$

ตัวอย่างที่ 1

1) $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 720$

2) $\frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!}$

$= 56$

3) $\frac{50!}{46!4!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46!}{46! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 230{,}300$

หมายเหตุ ในการเขียนแสดงการคูณ เช่น $3! \times 6!$ มักเขียนโดยละเครื่องหมายคูณ โดยเขียนเป็น $3!\,6!$

ตรวจสอบความก้าวหน้า 3

จงหาค่าของ

1. $\dfrac{7!}{5!3!}$

$$\frac{7!}{5!3!}=\frac{7\times 6}{3\times 2}=7$$

2. $\dfrac{10!}{3!7!}$

$$\frac{10!}{3!7!}=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2}=120$$

3. $\dfrac{12!}{(12-3)!3!}$

$$\frac{12!}{(12-3)!3!} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12\times 11\times 10}{3\times 2} = 220$$

4. $\dfrac{9!}{(9-9)!9!}$

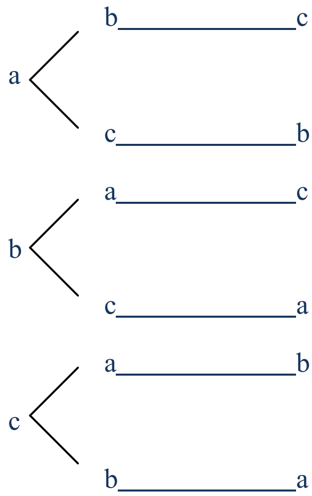
$$\frac{9!}{(9-9)!9!} = \frac{9!}{0!9!} = 1$$

วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ถ้าจัดวางหนังสือ 3 เล่ม ซึ่งจะเรียกชื่อว่าหนังสือ a, b และ c เรียงเป็นแถวตรง จะจัดเรียงได้เป็นแบบต่างๆ ดังแผนภาพต้นไม้

นั่นคือ จะจัดเรียงได้ 6 วิธี ดังนี้ abc, acb, bac, bca, cab, cba



เมื่อพิจารณาการทำงาน

งานที่หนึ่ง คือเลือกหนังสือวางในตำแหน่งแรก จะมีวิธีเลือกได้ 3 วิธี

งานที่สอง คือเลือกหนังสือวางในตำแหน่งที่สอง แต่ละวิธีของการทำงานที่หนึ่งจะมีวิธีเลือกทำงานที่สองได้ 2 วิธี

งานที่สาม คือเลือกหนังสือวางในตำแหน่งที่สามซึ่งเหลือหนังสือให้เลือกเพียงเล่มเดียว แต่ละวิธีของการทำงานที่หนึ่งและทำงานที่สองจะมีวิธีเลือกทำงานที่สามได้ 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะจัดหนังสือวางในแนวตรงได้ $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

วิธีเรียงลำดับของสมาชิกในเซตจำกัด ในแนวเส้นตรง เช่น ยืนเรียงแถวถ่ายรูป เรา เรียกว่า **วิธีเรียงสับเปลี่ยน** แต่ถ้าเรียงลำดับของสมาชิกในเซตจำกัด ในแนววงกลม เช่น จัดเรียงกระถางต้นไม้รอบเสาธง เรียกว่า **การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม**

ถ้ามีของ n สิ่งแตกต่างกัน นำมาจัดเรียงสับเปลี่ยน ได้ดังนี้

ตำแหน่งที่หนึ่ง มีสิ่งของอยู่ n ชิ้น จึงเลือกสิ่งของนำมาจัดได้ n วิธี

ตำแหน่งที่สอง เหลือสิ่งของอยู่ n - 1 ชิ้น แต่ละวิธีของการเลือกสิ่งของในตำแหน่งที่หนึ่ง จะมีวิธีเลือกสิ่งของในตำแหน่งที่สองได้ n - 1 วิธี

ตำแหน่งที่สาม เหลือสิ่งของอยู่ n - 2 ชิ้น แต่ละวิธีของการเลือกสิ่งของในตำแหน่ง ที่หนึ่งและตำแหน่งที่สอง จะมีวิธีเลือกสิ่งของในตำแหน่งที่สามได้ n - 2 วิธี

ตำแหน่งที่สี่ เหลือสิ่งของอยู่ n - 3 ชิ้น แต่ละวิธีของการเลือกสิ่งของในตำแหน่งที่หนึ่ง ตำแหน่งที่สอง และตำแหน่งที่สาม จะมีวิธีเลือกสิ่งของในตำแหน่งที่สี่ได้ n - 3 วิธี

.
.
.

ตำแหน่งที่ n เหลือสิ่งของอยู่ 1 ชิ้น จะมีวิธีเลือกสิ่งของในตำแหน่งที่ n ได้ 1 วิธี ดังนั้น วิธีทั้งหมดที่จะจัดวางสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันในแนวเส้นตรงได้เป็นวิธีต่างๆ เท่ากับ

$n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3 \times 2 \times 1 = n!$ วิธี

กฎข้อที่ 3 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับ n! วิธี

ตัวอย่างที่ 2 ต้องการถ่ายรูปนักเรียน 5 คน โดยให้นักเรียนยืนเข้าแถวเป็นแนวตรง จะมีวิธีจัดให้คนยืนในตำแหน่งต่างๆ กันได้กี่วิธี

วิธีทำ การให้นักเรียน 5 คน ยืนถ่ายรูปในแนวตรงเทียบได้กับการทำงาน 5 งาน

งานที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำงานได้ 5 วิธี

ในแต่ละวิธีของการทำงานที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำงานที่สองได้ 4 วิธี

ในแต่ละวิธีของการทำงานที่หนึ่งและงานที่สองมีวิธีเลือกทำงานที่สามได้ 3 วิธี

ในแต่ละวิธีของการทำงานที่หนึ่ง งานที่สองและงานที่สามมีวิธีเลือกทำงานที่สี่ได้ 2 วิธี

ในแต่ละวิธีของการทำงานที่หนึ่ง งานที่สอง งานที่สามและงานที่สี่มีวิธีเลือกทำงานที่ห้าได้ 1 วิธี

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด เท่ากับ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ วิธี

ตรวจสอบความก้าวหน้า 4

ต้องการแสดงเสื้อ 6 แบบแตกต่างกันในตู้แสดงสินค้าโดยแสดงเป็นแนวตรง จะจัดวางแตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

งานที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำงานได้ 6 วิธี

แต่ละวิธีของการทำงานที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำงานที่สองได้ 5 วิธี

.

.

ในแต่ละวิธีของการทำงานที่หนึ่งงานที่สอง ... งานที่ห้า มีวิธีเลือกทำงานที่หกได้ 1 วิธี

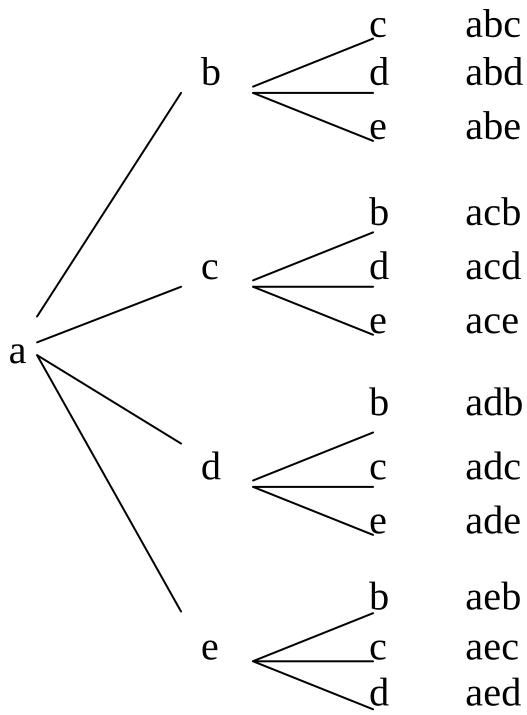
จำนวนวิธีจัดวางแตกต่างกันทั้งหมด $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ วิธี

จากตัวอย่างและตรวจสอบความก้าวหน้าที่กล่าวแล้วข้างต้นเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิกทั้งหมดในเซตจำกัด

พิจารณาตัวอย่างการเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิกบางส่วนของเซต จากตัวอย่างต่อไปนี้

มีนักกีฬาอยู่ 5 คน สมมุติชื่อเป็น a, b, c, d และ e ถ้าต้องการคัดตัวนักกีฬามือหนึ่ง มือสอง และมือสาม โดยกำหนดอักษร อักษรที่อยู่ในลำดับแรกแทนนักกีฬามือหนึ่ง อักษรในลำดับ ที่สองแทน

นักกีฬามือสอง และอักษรในลำดับที่สามแทนนักกีฬามือสาม ถ้านักกีฬาทุกคนมีโอกาสได้รับการคัดเลือกเท่าๆ กัน จะมีวิธีคัดเลือกเป็นแบบต่างๆ ซึ่งแสดงได้ด้วยแผนภูมิต้นไม้ต่อไปนี้



จากกรณีที่ขึ้นต้นด้วย a จัดได้ 12 วิธี เช่นเดียวกัน

กรณีที่ขึ้นต้นด้วย b จัดได้ 12 วิธี

กรณีที่ขึ้นต้นด้วย c จัดได้ 12 วิธี

กรณีที่ขึ้นต้นด้วย d จัดได้ 12 วิธี

กรณีที่ขึ้นต้นด้วย e จัดได้ 12 วิธี

รวมวิธีที่จัดได้ทั้งหมด $5 \times 12 = 60$ วิธี

เมื่อพิจารณาการจัดนักกีฬาเป็นนักกีฬามือหนึ่งมือสองและมือสามเป็นการทำงาน 3 งานจะพบว่า งานขั้นที่หนึ่งสามารถเลือกทำงานได้ 5 วิธี (เลือกตัวอักษร a, b, c, d หรือ e)

ในแต่ละวิธีของการทำงานในขั้นที่หนึ่ง จะเลือกทำงานในขั้นที่สองได้ 4 วิธี

ในแต่ละวิธีของการทำงานในขั้นที่หนึ่งและขั้นที่สอง จะเลือกทำงานในขั้นที่สามได้ 3 วิธี

ดังนั้น วิธีจัดนักกีฬาเป็นนักกีฬามือหนึ่งมือสอง และมือสาม จะจัดได้ทั้งหมด

$5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

นั่นคือ

วิธีทั้งหมดคือ $\dfrac{5!}{(5-3!)} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

ในการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด นำมาเรียงสับเปลี่ยน ครั้งละ r สิ่ง เมื่อ $r \le n$ ตำแหน่งที่จัดเรียงจะมีอยู่ r ตำแหน่ง

ตำแหน่งที่ 1 มีวิธีวางได้ n วิธี

ตำแหน่งที่ 2 ในแต่ละวิธีที่วางตำแหน่งที่ 1 มีวิธีวางในตำแหน่งที่ 2 ได้ n - 1 วิธี

ตำแหน่งที่ 3 ในแต่ละวิธีที่วางตำแหน่งที่ 1 และ 2 มีวิธีวางในตำแหน่งที่ 3 ได้ n - 2 วิธี

ตำแหน่งที่ 4 ในแต่ละวิธีที่วางตำแหน่งที่ 1, 2 และ 3 มีวิธีวางในตำแหน่งที่ 4 ได้ n - 3 วิธี

.

.

.

ตำแหน่งที่ r ในแต่ละวิธีที่วางตำแหน่งที่ 1, 2, 3, ..., r - 1 มีวิธีวางในตำแหน่งที่ r ได้ n - (r - 1) = n - r + 1 วิธี

ดังนั้น มีสิ่งของ n สิ่งแตกต่างกันทั้งหมด นำมาเรียงสับเปลี่ยนครั้งละ r สิ่ง จะ เรียงสับเปลี่ยนได้

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี}$$

กฎข้อที่ 4 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่ง แตกต่างกันทั้งหมด โดยเรียงสับเปลี่ยนครั้งละ r สิ่ง เท่ากับ

$$\frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี}, \quad (r \le n)$$

จำนวนวิธีเรียงลำดับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดทีละ r สิ่ง อาจเขียนแทนได้ในหลายแบบ เช่น เขียนแทนด้วย ${}_nP_r$, $P_{n,r}$ หรือ $P(n,r)$ สำหรับในที่นี้จะใช้ $P_{n,r}$

โดยที่ $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, $r \le n$

ตัวอย่างที่ 3 เขียนรายชื่อพนักงาน 15 คน ลงในสลากรายชื่อละ 1 ใบ ใส่ลงในภาชนะ แล้วสุ่มหยิบสลากขึ้นมาทีละหนึ่งใบสองครั้ง เพื่อแจกรางวัลที่หนึ่งและรางวัลที่สองตาม ลำดับ จงหาจำนวนวิธีที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมดหรือจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน

วิธีทำ จำนวนวิธีที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด คือ

$$P_{15,2} = \frac{15!}{(15-2)!}$$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13}{13!}$$

$$= 210 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่างที่ 4 มีวิธีจัดคน 3 คน จากคน 10 คนให้ทำหน้าที่ ประธาน รองประธาน และเลขานุการ ของคณะกรรมการจัดงานปีใหม่ จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ วิธีทั้งหมด คือ

$$P_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{7!}$$

$$= 10 \times 9 \times 8$$

$$= 720 \text{ วิธี}$$

ตรวจสอบความก้าวหน้า 5

จัดคนครั้งละ 3 คน จากคน 5 คน ให้ยืนเก็บตั๋วที่ประตูหมายเลข 1 หมายเลข 2 และหมายเลข 3 ตามลำดับ จะมีวิธีจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทั้งหมด คือ

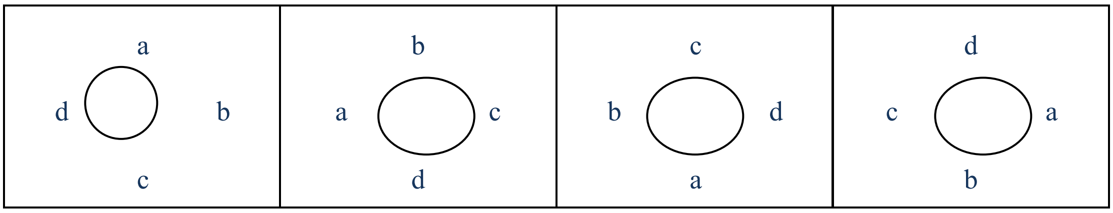
$$P_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

$$= \frac{5!}{2!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

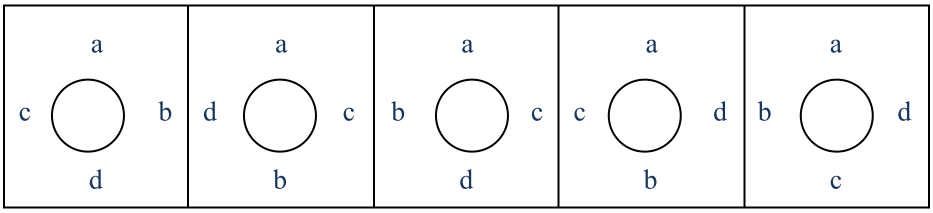
$$= 60 \text{ วิธี}$$

พิจารณาการจัดวางซุ้มแสดงสินค้า 4 ประเภท คือซุ้ม a, b, c และ d โดยจัดเชิงวงกลม ดังนี้



จะเห็นได้ว่า ทางซ้ายของ a เป็น b และทางด้านขวาของ a เป็น d ในทุกภาพ และเมื่อพิจารณาในตำแหน่งอื่นๆ ก็เป็นทำนองเดียวกัน เราจะกำหนดว่าการจัดวางในลักษณะข้างบนนี้เป็นแบบเดียวกัน กล่าวคือ นับเป็นหนึ่งวิธี

การเรียงสับเปลี่ยนที่จัดเรียงวัตถุเชิงวงกลมเช่นนี้เรียกว่า **การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม** (circular permutations) ในการหาจำนวนวิธีทั้งหมดของการจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม จากตัวอย่างข้างต้น หาได้โดยให้ตำแหน่งหนึ่งเสมือนอยู่กับที่ แล้วสลับตำแหน่งอื่นๆ ดังนั้น จะเหลือตำแหน่งที่สลับกันได้อยู่ 3 ตำแหน่ง จัดเรียงสับเปลี่ยนได้ $3! = 6$ วิธี ดังแสดงด้วยภาพประกอบ ต่อไปนี้



ในการเรียงสับเปลี่ยน ของ n สิ่ง เป็นวงกลม อาจกำหนดให้ของสิ่งหนึ่งเสมือนอยู่กับที่ ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง แล้วจัดสิ่งของที่เหลืออยู่ n - 1 สิ่ง จะเรียงสับเปลี่ยนได้ เท่ากับ

$(n - 1)(n - 2) \ldots 2 \times 1 = (n - 1)!$ วิธี

กฎข้อที่ 5

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ $(n - 1)!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5 จัด ชาย 6 คน หญิง 6 คน ยืนรอบกองไฟ ได้กี่วิธี

1) ถ้าไม่มีข้อกำหนดอื่นเพิ่มเติม

2) ถ้าหญิงยืนสลับกับชาย

วิธีทำ 1) ไม่มีข้อกำหนดอื่นเพิ่มเติม ดังนั้นจะมีคน 12 คน ยืนรอบกองไฟ เมื่อให้คนหนึ่งอยู่กับที่ ดังนั้น จะมีอีก 11 คนที่เหลือเรียงสับเปลี่ยนกันได้ 11! วิธี

2) ให้หญิงคนหนึ่งอยู่กับที่ ดังนั้น หญิงอีก 5 คนที่เหลือเรียงสับเปลี่ยนได้ 5! วิธีแต่ละวิธีที่หญิงยืน ชายจะเรียงสับเปลี่ยนได้ 6! วิธี

ดังนั้น จัดชาย 6 คน หญิง 6 คน ยืนสลับรอบกองไฟได้ $5! \times 6! = 86,400$ วิธี

ตรวจสอบความก้าวหน้า 6

1. จัดบูธแสดงสินค้า 8 บูธแตกต่างกัน เชิงวงกลม จะจัดเป็นแบบต่างๆ ได้ทั้งหมดกี่วิธี

จัดจัดเป็นแบบต่าง ๆ ได้ ทั้งหมด (8-1)! = 7!

= 5,040 วิธี

2. จัดกระถางโป๊ยเซียน 7 กระถางแตกต่างกัน และกระถางหงอนไก่ 7 กระถางแตกต่างกัน เรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมได้กี่วิธี ถ้า

1) ไม่มีข้อกำหนดอื่นเพิ่มเติม

มีกระถางแตกต่างกันทั้งหมด 14 กระถาง

จัดเป็นแบบต่าง ๆ ได้ (14 – 1)! = 13! วิธี

= 6,27,020,800 วิธี

2) วางกระถางโป๊ยเซียนสลับกับกระถางหงอนไก่

ให้กระถางโป๊ยเซียนกระถางหนึ่งอยู่กับที่

ดังนั้น กระถางโป๊ยเซียนที่เหลือจัดเรียงสับเปลี่ยนได้ 6! วิธี

แต่ละวิธีที่วางกระถางโป๊ยเซียน กระถางหงอนไก่จะเรียงสับเปลี่ยนได้ 7! วิธี

ดังนั้น จัดเป็นแบบต่าง ๆ ได้ 6!7! = 3,628,800 วิธี

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\frac{7!}{5!}$

$$\frac{7!}{5!} = 7\times 6 = 42$$

2) $\frac{8!}{4!}$

$$\frac{8!}{4!} = 8\times 7\times 6\times 5 = 1,680$$

3) $\frac{8!}{7!}$

$$\frac{8!}{7!} = 8$$

4) $\frac{12!}{11!}$

$$\frac{12!}{11!} = 12$$

5) $\frac{10!}{3!7!}$

$$\frac{10!}{3!7!} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120$$

6) $\frac{9!}{2!7!}$

$$\frac{9!}{2!7!} = \frac{9\times 8}{2\times 1} = 36$$

7) $\frac{9!}{(9-3)!3!}$

$$\frac{9!}{(9-3)!3!} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} = 84$$

8) $\frac{7!}{0!7!}$

$$\frac{7!}{0!7!} = \frac{7!}{7!} = 1$$

2. 1) มีวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 6 ตัวจากคำว่า SUNDAY ได้ทั้งหมดกี่วิธี

มีวิธีเรียงที่แตกต่างกันได้ 6! = 720 วิธี

2) ถ้าอักษรตัวแรก เป็นอักษร S จะจัดเรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมดกี่วิธี

S					

อักษรตัวแรกเป็น S จะเหลือตำแหน่งอื่นให้เรียงสับเปลี่ยนได้อีก 5 ตำแหน่ง

มีวิธีจัดเรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมด 5! = 120 วิธี

3) ถ้าใช้อักษรตัวแรกเป็น S และอักษรตัวสุดท้ายเป็น Y จะจัดเรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมดกี่วิธี

จะเรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมด $\boxed{s}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{Y}$ = 4! = 24 วิธี

3. ต้องการเขียนจำนวนที่มี 4 หลัก จากตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ได้กี่วิธี ถ้า

1) ไม่มีข้อกำหนดอื่น

$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9{,}000$ วิธี

2) จำนวนที่เขียนเป็นจำนวนคู่

$9 \times 10 \times 10 \times 5 = 4{,}500$ วิธี

3) จำนวนที่เขียนเป็นจำนวนคี่

$9 \times 10 \times 10 \times 5 = 4{,}500$ วิธี

4. ต้องการเขียนจำนวนที่มี 3 หลัก จากตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5 จะจัดได้กี่วิธี ถ้า

1) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่มเติม

$5 \times 6 \times 6 = 180$ วิธี

2) จำนวนที่เขียนเป็นจำนวนคู่

$5 \times 6 \times 3 = 90$ วิธี

3) จำนวนที่เขียนเป็นจำนวนคี่

$5 \times 6 \times 3 = 90$ วิธี

5. มีผู้สมัครเล่นเทนนิส 5 คน ถ้าต้องการทีมละ 2 คน โดยแต่ละทีมประกอบด้วยเดี่ยวมือหนึ่ง และเดี่ยวมือสอง จะมีวิธีจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

จะมีวิธีจัดได้ $P_{5,2} = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5\times4\times3!}{3!} = 5\times4 = 20$ วิธี

6. มีห้องแสดงสินค้าอยู่ 7 ห้อง ถ้าต้องการจัดอันดับเข้าชมห้องแสดงสินค้า 4 ห้อง จะจัดอันดับได้ทั้งหมดกี่วิธี

จะจัดอันดับได้ทั้งหมด $P_{7,4} = \dfrac{7!}{(7-4)!} = \dfrac{7\times6\times5\times4\times3!}{3!} = 7\times6\times5\times4 = 840$ วิธี

7. ชุมนุมหมากกระดานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ประกอบด้วยสมาชิก 10 คน มีวิธีกี่วิธี ที่จะเลือกคณะกรรมการ 4 คน ประกอบด้วยประธาน รองประธาน เลขานุการ และเหรัญญิก จากสมาชิก 10 คนนี้

จาก $P_{n,r} = P_{10,4}$

ดังนั้น มีวิธีเลือกได้ $= \dfrac{10!}{(10-4)!}$

$= \dfrac{10\times9\times8\times7\times6!}{6!}$

$= 5{,}040$ วิธี

8. มีกระถางกล้วยไม้อยู่ 9 กระถาง แตกต่างกัน นำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมรอบศาลาพัก จะมีวิธีจัดวางทั้งหมดกี่วิธี

จะมีวีจัดวางสับเปลี่ยนเชิงวงกลมได้ $(n-1)! = (9-1)! = 8!$ วิธี

$= 40{,}320$ วิธี

9. จัดนักเรียนชาย 6 คน นักเรียนหญิง 6 คนยืนเรียงแถวในแนวตรงได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า

1) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่มเติม

จัดนักเรียนชายและหญิงได้ทั้งหมด 12! วิธี

2) ชายและหญิงยืนสลับกัน

จัดนักเรียนชายได้ 6! วิธี และจัดนักเรียนหญิงได้ 6! วิธี

$= 6!6! + 6!6! = 2(6!6!)$ วิธี

3) ชายสามคนยืนสลับกับหญิงสามคน

จะจัดได้ $2\times 6!6!$ วิธี

10. จัดนักเรียนหญิง 6 คน นักเรียนชาย 6 คน ยืนเรียงกันเป็นวงกลมได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า

1) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่มเติม

จาก $(n-1)! = (12-1)! = 11!$ วิธี

2) หญิงสองคน และชายสองคนยืนสลับกัน

จะจัดได้ 5!6! วิธี

11. มีวิธีจัดหนังสือ 6 เล่มแตกต่างกัน ให้นักเรียนซึ่งมีอยู่ 8 คนยืมไปอ่านที่บ้าน ได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้ากำหนดให้ นักเรียนหนึ่งคนยืมหนังสือได้เพียงหนึ่งเล่ม

จะมีวิธีจัดได้ $P_{n,r}$ จะได้ $\frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!} = 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3$

$= 20,160$ วิธี

12. มีวิธีที่จะจัดคน 4 คน ให้นั่งเก้าอี้ซึ่งมีอยู่ 7 ตัวได้กี่วิธี

จะมีวิธีจัดได้ $P_{n,r}$ จะได้ $\frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 7\times 6\times 5\times 4$

$= 540$ วิธี

วิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

พิจารณาการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด เช่น ให้ ก, ข, ค และ ง เป็นสิ่งของสี่อย่างที่แตกต่างกันทั้งหมด เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนจะได้ 4! = 24 วิธี ดังนี้

กขคง, กขงค, กคขง, กคงข, กงขค, กงคข,

ขกคง, ขกงค, ขคกง, ขคงก, ขงกค, ขงคก,

คกขง, คกงข, คขกง, คขงก, คงกข, คงขก,

งกขค, งกคข, งขกค, งขคก, งคกข, งคขก

ถ้า ก และ ข แทนสิ่งที่เหมือนกัน โดยเขียนแทน ก และ ข ด้วย x และ ค และ ง แทนสิ่งที่เหมือนกัน โดยเขียนแทน ค และ ง ด้วย y จะได้วิธีต่างๆ ดังนี้

xxyy, xxyy, xyxy, xyyx, xyxy, xyyx,

xxyy, xxyy, xyxy, xyyx, xyxy, xyyx,

yxxy, yxyx, yxxy, yxyx, yyxx, yyxx,

yxxy, yxyx, yxxy, yxyx, yyxx, yyxx

เมื่อพิจารณาแล้วจะพบว่ามีวิธีที่แตกต่างกัน

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times 3\times 2\times 1}{2\times 2}$$

$= 6$ วิธี

ดังนี้ xxyy, xyxy, xyyx, yxxy, yxyx และ yyxx

ถ้านำ ก, ก, ก, ข, ข มาเรียง สับเปลี่ยนจะเห็นที่แตกต่างกันอยู่เพียง

$\frac{5!}{3!2!} =$ 10 วิธี

ได้แก่ กกกขข, กกขขก, กขขกก, ขขกกก, กกขกข, กขกกข, กขกขก, ขกกกข, ขกกขก, ขกขกก

ในกรณีที่มีสิ่งของ n สิ่ง โดยที่

มีสิ่งของเหมือนกัน n_1 สิ่งในกลุ่มที่ 1

มีสิ่งของเหมือนกัน n_2 สิ่งในกลุ่มที่ 2

มีสิ่งของเหมือนกัน n_3 สิ่งในกลุ่มที่ 3

.

.

.

มีสิ่งของเหมือนกัน n_k สิ่งในกลุ่มที่ k และ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่เห็นความแตกต่างอยู่ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ วิธี

กฎข้อที่ 6 ถ้ามีสิ่งของอยู่ n สิ่ง ในจำนวนสิ่งของ n สิ่งนี้มี n_1 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 1 มี n_2 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 2 มี n_3 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 3 ..., มี n_k สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่ม ที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n สิ่งนี้ เท่ากับ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 จัดธงสีขาว 3 ธง ธงสีแดง 2 ธง และธงสีน้ำเงิน 4 ธง แขวนในแนวเส้นตรงจะเรียงสับเปลี่ยนได้ลักษณะต่าง ๆ กัน ได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ วิธีทั้งหมด

$$= \frac{9!}{3!4!2!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3!4!2!}$$

$$= 1{,}260 \text{ วิธี}$$

ตรวจสอบความก้าวหน้า 7

จัดแสดงหนังสือภาษาไทยที่เหมือนกัน 3 เล่ม หนังสือสังคมศึกษาที่เหมือนกัน 4 เล่ม และหนังสือภาษาอังกฤษที่เหมือนกัน 2 เล่ม ในตู้แสดงหนังสือในแนวตรง จะเรียงสับเปลี่ยนได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทั้งหมด

$$= \frac{9!}{3!4!2!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3!4!2!}$$

$$= 1{,}260 \text{ วิธี}$$

บ่อยครั้งที่เราเกี่ยวข้องกับจำนวนวิธีของการแบ่งเซตของสิ่งของเป็น r เซตย่อย ซึ่งแต่ละเซตย่อยใดๆ ไม่มีสมาชิกร่วมกัน และยูเนียนของทุกเซตย่อย คือเซตดั้งเดิม พิจารณาการแบ่ง {a, b, c, d, e} ออกเป็น 2 เซตย่อย ซึ่งเซตหนึ่งมีสมาชิก 4 ตัว อีกเซตหนึ่งมีสมาชิก 1 ตัว จะแบ่งได้วิธีต่างๆ ดังนี้

{a, b, c, d} กับ {e}, {a, b, c, e} กับ {d}, {a, b, d, e} กับ {c}, {a, c, d, e} กับ {b} และ {b, c, d, e} กับ {a}

นั่นคือ แบ่งได้เป็นวิธีต่างๆ 5 วิธี

จำนวนวิธีการแบ่งปัญหาข้างต้นนี้ หาได้จาก

$$\binom{5}{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$$

กฎข้อที่ 7 วิธีแบ่งสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน เป็น k กลุ่ม โดยกลุ่มที่หนึ่งมี n_1 สิ่ง กลุ่มที่สอง มี n_2 สิ่ง กลุ่มที่สามมี n_3 สิ่ง ... กลุ่มที่ k มี n_k สิ่งจะจัดเป็นวิธีต่างๆ ได้

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} \quad \text{วิธี}$$

เมื่อ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

ตัวอย่างที่ 2 จัดคน 7 คนให้ขึ้นรถสามคัน โดยคันที่หนึ่งจัดให้ขึ้น 3 คน คันที่สองจัดให้ขึ้น 2 คน และคันที่สามจัดให้ขึ้น 2 คน จะมีวิธีจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ จัดเป็นวิธีต่างๆ ได้ $\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!}$

$= 210$ วิธี

1.4 การจัดหมู่ (Combination)

ในปัญหาทั่วๆ ไป เราจะสนใจจำนวนวิธีของการเลือกสิ่งต่างๆ r สิ่ง จากสิ่งต่างๆ n สิ่ง โดยไม่สนใจอันดับที่ การเลือกนี้เรียกว่า การจัดหมู่ (combination) การจัดหมู่เป็นการแบ่งสิ่งต่างๆ ออกเป็นสองกลุ่ม กลุ่มหนึ่งบรรจุ r สิ่ง และอีกกลุ่มหนึ่งบรรจุ n - r สิ่งที่เหลืออาจเขียนแทน จำนวนของการจัดหมู่ได้หลายแบบ เช่น $C_{n,r}$, $\binom{n}{r}$ หรือ $\binom{n}{r,n-r}$ สำหรับหนังสือเล่มนี้เมื่อกล่าวถึงการจัดหมู่มักจะใช้สัญลักษณ์สองแบบแรก

กฎข้อที่ 8 จำนวนวิธีของการจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน r สิ่ง สิ่งที่นำมาจัดครั้งละ r สิ่ง

คือ $\binom{n}{1} = C_{n,R} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

ตัวอย่างที่ 3 เลือกรถเด็กเล่น 2 คัน จากรถเด็กเล่น 5 คัน ซึ่งจะเรียกชื่อรถเด็กเล่น 5คันนี้เป็น ก,ข,ค,ง และ จ มีวิธีการเลือกวิธีต่าง ๆ ได้ 10 วิธี ดังนี้

กข, กค, กง, ขค, ขง, ขจ ,คง , คจ, งจ

วิธีทำ ซึ่งหาได้จากสูตร $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2!3!}$

$= 10$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4 มีคณะกรรมการที่เป็นชาย 4 คน และหญิง 3 คน ต้องการเลือกคณะทำงาน 3 คนจากคณะกรรมการชุดนี้ โดยต้องการชาย 1 คน หญิง 2 คน จะมีวิธีเลือกคณะทำงานได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีที่จะเลือกชาย 1 คน จากชาย 4 คน ได้

$$C_{4,1} = \frac{4!}{3!1!}$$

$= 4$ วิธี

จำนวนวิธีที่จะเลือกหญิง 2 คน จากหญิง 3 คน ได้

$$C_{3,2} = \frac{3!}{1!2!}$$

$= 3$ วิธี

และโดยใช้กฎข้อที่ 1 จะได้วิธีทั้งหมดที่จะเลือกชาย 1 คน หญิง 2 คน เป็น $4 \times 3 = 12$ วิธี

สังเกตว่าจาก $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ และ $C_{n,r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $r \leq n$

ดังนั้น $r!\,C_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!} = P_{n,r}$

ตรวจสอบความก้าวหน้า 8

มีคณะกรรมการที่เป็นชาย 4 คน และหญิง 3 คน ต้องการเลือกคณะทำงาน 3 คน จากคณะกรรมการชุดนี้ โดยต้องการชายอย่างน้อย 2 คน จะมีวิธีเลือกคณะทำงานได้ทั้งหมดกี่วิธี

จำนวนวิธีที่จะเลือกคณะทำงาน 3 คน โดยเป็นชายอย่างน้อย 2 คน

เป็น $\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{3}\binom{3}{0} = \left[\dfrac{4!}{2!2} \times \dfrac{3!}{2!1!}\right] + \left[\dfrac{4!}{1!3!} \times \dfrac{3!}{3!0!}\right]$ วิธี

$= (6 \times 3) + 4$ วิธี

$= 22$ วิธี

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาค่าของ

1) $\binom{6}{4}$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

2) $\binom{5}{5}$

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{0!5!} = 1$$

3) $\binom{20}{2}$

$$\binom{20}{2} = \frac{20!}{18!2!} = 190$$

4) $\binom{20}{18}$

$$\binom{20}{18} = \frac{20!}{2!18!} = 190$$

5) $\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{(n+1)!}{1!\,n!} = n+1$$

6) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

$$\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2}$$

2. จงแสดงว่า $C_{n,r} = C_{n,n-r}$

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_{n,n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ดังนั้น $C_{n,r} = C_{n,n-r}$

3. จงแสดงว่า $C_{n+1,r} + C_{n+1,r-1} = C_{n+2,r}$

$$C_{n+1,r} + C_{n+1,r-1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!} + \frac{(n+1)!}{(n-r+2)!(r-1)!}$$

$$= \frac{[(n+1)!][n-r+2]}{(n-r+2)!r!} + \frac{(n+1)r!}{(n-r+2)!r!}$$

$$= \frac{(n+1)![n-r+2-r]}{(n-r+2)!r!}$$

$$= \frac{(n+2)!}{(n-r+2)!r!}$$

และ $C_{n+2,r} = \dfrac{(n+2)!}{(n-r+2)!r!}$

ดังนั้น $C_{n+1,r} + C_{n+1,r-1} = C_{n+2,r}$

4. จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกของแถม 3 ชิ้น จากของแถมที่มีอยู่ 8 ชิ้น

จำนวนวิธี คือ $\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \dfrac{8!}{5!3!}$

$$= \frac{8\times7\times6}{3\times2}$$

$$= 56$$

5. หาจำนวนวิธีที่จะเลือกดินสอสี 3 สี จากดินสอที่มีอยู่ 12 สี

จำนวนวิธี คือ $\binom{12}{3} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12\times 11\times 10}{3\times 2} = 220$ วิธี

6. จงหาค่า n จากสมการต่อไปนี้

1) $\binom{n}{8} = \binom{30}{22}$

วิธีทำ $\frac{n!}{(n-8)!8!} = \frac{30!}{8!22!}$

จะได้ n $= 30$

2) $\binom{n}{10} = \binom{n}{15}$

$\frac{n!}{(n-10)!10!} = \frac{n!}{(n-15)!15!}$

จะได้ $\frac{(n-10)!}{(n-15)!} = \frac{15!}{10!}$

$(n-10)(n-11)(n-12)(n-13)(n-14) = 15\times 14\times 13\times 12\times 11$

จะได้ $n = 25$

3) $P_{n,4} = 4C_{n,5}$

$\frac{n!}{(n-4)!} = 4\times \frac{n!}{(n-5)!5!}$

$5! = 4\times \frac{(n-4)!}{(n-5)!}$

$5! = 4\times (n-4)$

$n-4 = 30$

$n = 34$

7. ไพ่สำรับหนึ่ง มี 4 ชุด คือ โพดำ โพแดง ดอกจิก ข้าวหลามตัด โดยแต่ละชุดมี 13 ใบ คือ A ,K ,Q , J และ 2 ถึง 10 จงหาจำนวนวิธีที่จะหยิบไพ่ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1) 4 ใบ ซึ่งเป็นไพ่จากทั้งสี่ชุด

$\binom{13}{1}\times\binom{13}{1}\times\binom{13}{1}\times\binom{13}{1} = 13\times 13\times 13\times 13 = 28{,}561$ วิธี

2) 4 ใบ ซึ่งเป็นไพ่ชุดเดียวกัน

เลือกไพ่โพดำ 4 ใบ หรือโพแดง 4 ใบ หรือดอกจิก 4 ใบ หรือข้าวหลามตัด 4 ใบ

จะได้ $\binom{13}{4}+\binom{13}{4}+\binom{13}{4}+\binom{13}{4} = 4\times\frac{13!}{9!4!}$

$$= \frac{4\times 13\times 12\times 11\times 10}{4\times 3\times 2\times 1} = 2{,}860 \text{ วิธี}$$

3) 5 ใบ โดยเป็นโพดำ 1 ใบ โพแดง 2 ใบ และดอกจิก 2 ใบ

จะได้ $\binom{13}{1}\binom{13}{2}\binom{13}{2} = \frac{13\times 13\times 12}{2}\times\frac{13\times 12}{2} = 79{,}092$ วิธี

8. มีแผ่นวีซีดีเพลงในกล่องอยู่ 10 แผ่น เป็นเพลงของค่าย R จำนวน 3 แผ่น เพลงของค่ายจำนวน 3 แผ่น และเพลงของค่าย G จำนวน 4 แผ่น ถ้าหยิบแผ่นวีซีดีจากกล่องนี้จำนวน 3 แผ่น จงหาจำนวนวิธี

1) หยิบแผ่นวีซีดีของค่าย R 2 แผ่น

จะได้ $\binom{3}{2}\binom{7}{1} = 3\times 7 = 21$ วิธี

2) หยิบแผ่นวีซีดีของค่าย R 2 แผ่น และค่าย S 1 แผ่น

จะได้ $\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2}\binom{3}{1} = 3\times 3 = 9$ วิธี

3) หยิบแผ่นวีซีดีของค่าย G อย่างน้อย 1 แผ่น

จะได้ $\binom{4}{1}\binom{6}{2}+\binom{4}{2}\binom{6}{1}+\binom{4}{3} = (4\times 15)+(6\times 6)+4$

$= 60+36+4$

$= 100$ วิธี

9. มีเสื้อสีแดง 3 ตัว เสื้อสีเขียว 4 ตัว และเสื้อสีเหลือง 5 ตัว เลือกเสื้อสีละ 2 ตัว จะมีวิธีเลือกได้ทั้งหมดกี่วิธี

จะได้ $\binom{3}{2}\binom{4}{2}\binom{5}{2} = 3\times 6\times 10 = 180$ วิธี

10. จากกลุ่มของชาย 4 คน หญิง 3 คน จะมีวิธีเลือกคณะกรรมการ 3 คน ได้กี่วิธี ถ้า

1) ไม่มีข้อจำกัดใด ๆ

จะได้ $\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2} = 35$ วิธี

2) ประกอบด้วย ชาย 2 คน หญิง 1 คน

จะได้ $\binom{4}{2}\binom{3}{1} = \frac{4\times 3}{2} = 18$ วิธี

3) ประกอบด้วยชาย 2 คน หญิง 1 คน เมื่อมีชายคนหนึ่งต้องเป็นคณะกรรมการอย่าง แน่นอน

จะได้ $\binom{1}{1}\binom{3}{1}\binom{3}{1} = 1\times 3\times 3 = 9$ วิธี

11. มีกี่วิธีที่ เด็กชาย 7 คน และเด็กหญิง 6 คน ยืนเป็นแถว โดยเด็กชายและเด็กหญิงยืนสลับกัน

	ช	ญ	ช	ญ	ช	ญ	ช	ญ	ช	ญ	ช	ญ	ช
แบบท่ายืน	□	○	□	○	□	○	□	○	□	○	□	○	□

จะได้ 7!6! วิธี

12. คน 8 คน ซึ่งเป็นเพื่อนกันได้เข้าพักในโรงแรม โดยพักห้อง 3 ห้อง โดยห้องที่หนึ่งพักได้ 2 คน ห้องที่สองพักได้ 3 คน ห้องที่สามพักได้ 3 คน จะมีวิธีจัดคน 8 คนเข้าห้องพักได้กี่วิธี

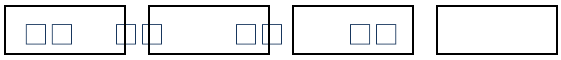
จะเข้าห้องพักได้ $\frac{8!}{2!3!3!} = 560$ วิธี

13. คู่แต่งงาน 4 คู่ได้ที่นั่ง 8 ที่นั่งเรียงติดกันเป็นแนวตรงเพื่อดูดนตรี มีกี่วิธีที่คนแปดคนนี้จะนั่งเก้าอี้ ถ้า
    1) ไม่มีข้อจำกัดอื่น

       จะมีวิธีจัดคนแปดคนนั่งเก้าอี้ได้ $8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

       $= 40{,}320$ วิธี

    2) ถ้าแต่ละคู่นั่งติดกัน



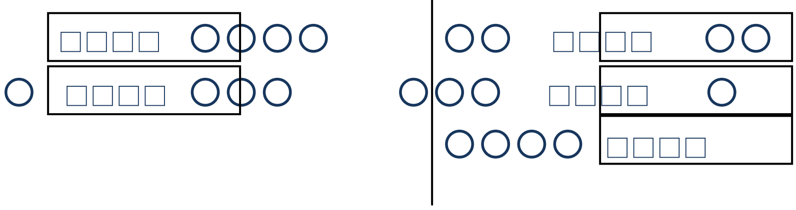
       สมมติจับแต่ละคู่ผูกแขนกันไว้ ดังนั้น จะเหลือวิธีที่จะสลับคน 4 คู่นี้ได้ $4! = 24$ วิธี

       เมื่อคู่ที่ 1 คู่ที่ 2 คู่ที่ 3 และคู่ที่ 4 สลับที่นั่งกับคู่ของตนได้อีก

       จึงมีวิธีต่าง ๆ เป็น $2\times2\times2\times2\times24 = 384$ วิธี

    3) ถ้าผู้ชายทั้งสี่คนนั่งติดกัน

       มี 5 แบบ คือ



       แต่ละแบบมี 4!4! วิธี ดังนั้น วิธีทั้งหมดเป็น $5!\times4!\times4!$ วิธี

14. มีผู้สมัครเป็นคณะกรรมการจัดการแข่งขันกีฬาเป็นชาย 5 คน และหญิง 4 คน ต้องการเลือกคณะกรรมการ 3 คนจากผู้สมัครนี้ โดยต้องการชายอย่างน้อย 1 คน จะมีวิธีเลือกคณะทำงานได้ทั้งหมดกี่วิธี

    วิธีทั้งหมด $\binom{5}{1}\binom{4}{2} + \binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{3}\binom{4}{0}$ วิธี

    $= (5\times6) + (10\times4) + (10\times1)$ วิธี

    $= 30 + 40 + 10$ วิธี

    $= 80$ วิธี

5 ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorern)

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ พิจารณาสัมประสิทธิ์ของ $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับดังนี้

การกระจายของ $(a+b)^n$	**สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์**
$(a+b)^0 = 1$	**1**
$(a+b)^1 = a+b$	**1 1**
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	**1 2 1**
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$	**1 3 3 1**
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	**1 4 6 4 1**
$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	**1 5 10 10 5 1**

ปาสกาล (Pascal, Blaise) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส เป็นคนแรกที่สังเกตพบความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ของการกระจายของ $(a + b)^n$ โดยสังเกตเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆ จะสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์ของการกระจายของ $(a + b)^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า หรือเท่ากับ 2 ดังตารางข้างต้น และโดยที่จำนวนที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ เรียงตัวเป็นรูปสามเหลี่ยม เรียกรูปสามเหลี่ยมปาสกาล (Pascal's triangle)

การกระจายทวินามของ $(a + b)^n$ มีข้อสังเกตดังนี้

1) การกระจายของ $(a + b)^n$ มี $n + 1$ พจน์

2) เลขชี้กำลังของ a เริ่มที่ n และลดลงทีละ 1 จนเป็น 0 ในพจน์สุดท้าย

3) เลขชี้กำลังของ b เริ่มที่ 0 ในพจน์แรก และเพิ่มขึ้นทีละ1 จนกระทั่งเป็น n ในพจน์สุดท้าย

4) ผลบวกของเลขชี้กำลังของ a และ b ในแต่ละพจน์เท่ากับ n

5) พจน์แรกและพจน์สุดท้ายมีสัมประสิทธิ์เป็น 1

6) สัมประสิทธิ์ของพจน์อื่นๆ เช่น สัมประสิทธิ์ของการกระจายของ $(a + b)^5$ เมื่อเรียงพจน์ที่มีเลขชี้กำลังของ a จากมากไปน้อย จะได้สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สองถึงพจน์ที่ห้าเป็น 5, 10, 10 และ 5 ตามลำดับ นั่นคือ

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์มีความเกี่ยวข้องดังนี้

5 ได้จาก 1 และ 4 เมื่อ 1 และ 4 เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่หนึ่งและพจน์ที่สองของ การกระจายของ $(a+b)^4$ ตามลำดับ

10 ได้จาก 4 และ 6 เมื่อ 4 และ 6 เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สองและพจน์ที่สามของการกระจายของ $(a+b)^4$ ตามลำดับ

10 ได้จาก 6 และ 4 เมื่อ 6 และ 4 เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สามและพจน์ที่สี่ของ การกระจายของ $(a+b)^4$ ตามลำดับ

5 ได้จาก 4 และ 1 เมื่อ 4 และ 1 เป็นสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่สี่และพจน์ที่ห้าของการกระจายของ $(a+b)^4$ ตามลำดับ

ดังพิจารณาค่าได้จากตาราง

เช่นเดียวกันในการหา $(a+b)^6$ โดยใช้หลักการหาสัมประสิทธิ์ดังที่กล่าว จะได้

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียน $(2a+b)^4$ ในรูปกระจาย

วิธีทำ

$$(2a+b)^4 = (2a)^4 + \binom{4}{1}(2a)^3b + \binom{4}{2}(2a)^2b^2 + \binom{4}{1}(2a)b^3 + b^4$$

$$= 16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4$$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียน $(2a-b)^6$ ในรูปกระจาย

วิธีทำ

$$(2a-b)^6 = (2a)^6 + \binom{6}{1}(2a)^5(-b) + \binom{6}{2}(2a)^4(-b)^2 + \binom{6}{3}(2a)^3(-b)^3 + \binom{6}{4}(2a)^2(-b)^4 + \binom{6}{5}(2a)(-b)^5 + (-b)^6$$

$$= 64a^6 - 192a^5b + 240a^4b^2 - 160a^3b^3 + 60a^2b^4 - 12ab^5 + b^6$$

ตรวจสอบความก้าวหน้า 9

จงเขียนในรูปกระจาย

1. $(a+3b)^6$

$$(a+3b)^6 = (a)^6+\binom{6}{1}a^5(3b)+\binom{6}{2}a^4(3b)^2+\binom{6}{3}a^3(3b)^3+\binom{6}{4}a^2(3b)^4+\binom{6}{5}a(3b)^5+(3b)^6$$

$$= a^6+18a^5b+135a^4b^2+540a^3b^3+1{,}215a^2b^4+1{,}458ab^5+729b^6$$

2. $(a-3b)^5$

$$(a-3b)^5 = a^5+\binom{5}{1}a^4(-3b)+\binom{5}{2}a^3(-3b)^2+\binom{5}{3}a^2(-3b)^3+\binom{5}{4}a(-3b)^4+(-3b)^5$$

$$= a^5-15a^4b+90a^3b^2-270a^2b^3+405ab^4-243b^5$$

สูตรทวินาม

พิจารณา $\underbrace{(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b) \quad \ldots \quad (a+b)}_{\text{มี } (a+b) \text{ คูณกันอยู่ } n \text{ พจน์}}$

การหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่างๆ ของการกระจาย คือ การหาจำนวนวิธีของการคูณแบบต่างๆ ดังนี้

a^n ได้จากเลือก a มาจาก n วงเล็บ และเลือก b จาก 0 วงเล็บ

พิจารณาการคูณเป็นการเลือก b จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด คือ

$$C_{n,0} = 1 \quad \text{วิธี}$$

$a^{n-1}b$ ได้จากเลือก a มาจาก n - 1 วงเล็บ และเลือก b จาก 1 วงเล็บ

พิจารณาการคูณเป็นการเลือก b จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด คือ

$$C_{n,1} = n \quad \text{วิธี}$$

$a^{n-2}b^2$ ได้จากเลือก a มาจาก n - 2 วงเล็บ และเลือก b จาก 2 วงเล็บ

พิจารณาการคูณเป็นการเลือก b จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด คือ

$$C_{n,2} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \text{วิธี}$$

.
.
.

$a^{n-r}b^r$ ได้จากเลือก a มาจาก n - r วงเล็บ และเลือก b จาก r วงเล็บ

พิจารณาการคูณเป็นการเลือก b จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด คือ

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-2)2!} \quad \text{วิธี}$$

.
.

a^2b^{n-2} ได้จากเลือก a มาจาก 2 วงเล็บ และเลือก b จาก n - 2 วงเล็บ

พิจารณาการคูณเป็นการเลือก b จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด คือ

$$C_{n,n-2} = \frac{n!}{(n-2)2!} \quad \text{วิธี}$$

ab^{n-1} ได้จากเลือก a มาจาก 1 วงเล็บ และเลือก b จาก n - 1 วงเล็บ

พิจารณาการคูณเป็นการเลือก b จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด คือ

$$C_{n,n-1} = n \quad \text{วิธี}$$

b^n ได้จากเลือก a มาจาก 0 วงเล็บ และเลือก b มาจาก n วงเล็บ

พิจารณาการคูณเป็นการเลือก b จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด คือ

$$C_{n,n} = 1 \quad \text{วิธี}$$

ดังนั้น

สูตรทวินาม

$$(a+b)^n = C_{n,0}a^nb^0 + C_{n,1}a^{n-1}b + C_{n,2}a^{n-2}b^2 + \dots + C_{n,n-2}a^2b^{n-2} + C_{n,n-1}ab^{n-1} + C_{n,n}b^n$$

หรือ

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k, \; n \geq 1$$

การพิสูจน์สูตรทวินามข้างต้นนี้ในรูปทั่วไปต้องใช้การพิสูจน์ที่เรียกว่า การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (mathematical induction) ซึ่งจะไม่กล่าวในระดับชั้นนี้

ตัวอย่างที่ 3 จงใช้สูตรทวินาม กระจาย $(a + \frac{1}{2}b)^7$

วิธีทำ $(a + \frac{1}{2}b)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^{7-k}(\frac{1}{2}b)^k$

$$= \binom{7}{0}a^7 + \binom{7}{1}a^6(\frac{1}{2}b) + \binom{7}{2}a^5(\frac{1}{2}b)^2 + \binom{7}{3}a^4(\frac{1}{2}b)^3 + \binom{7}{4}a^3(\frac{1}{2}b)^4 + \binom{7}{5}a^2(\frac{1}{2}b)^5 + \binom{7}{6}a(\frac{1}{2}b)^6 + \binom{7}{7}(\frac{1}{2}b)^7$$

$$= a^7 + \frac{7}{2}a^6b + \frac{21}{4}a^5b^2 + \frac{35}{8}a^4b^3 + \frac{35}{16}a^3b^4 + \frac{21}{32}a^2b^5 + \frac{7}{64}ab^6 + \frac{1}{128}b^7$$

ตรวจสอบความก้าวหน้า 10

จงใช้สูตรทวินาม กระจาย $(x - y)^7$

แนะนำ $(x - y)^7 = [x + (-y)]^7$

$$= \binom{7}{0}x^7 + \binom{7}{1}x^6(-y) + \binom{7}{2}x^5(-y)^2 + \binom{7}{3}x^4(-y)^3 + \binom{7}{4}x^3(-y)^4 + \binom{7}{5}x^2(-y)^5 + \binom{7}{6}x(-y)^6 + \binom{7}{7}(-y)^7$$

$$= x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 + 35x^3y^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7$$

พิจารณาพจน์ต่างๆ ของการกระจายของ $(a + b)^n$

จะได้ว่า

พจน์ที่ 1 คือ $C_{n,0}a^nb^0$

พจน์ที่ 2 คือ $C_{n,1}a^{n-1}b$

พจน์ที่ 3 คือ $C_{n,2}a^{n-2}b^2$

พจน์ที่ 4 คือ $C_{n,3}a^{n-3}b^3$

⋮

สูตรทวินาม พจน์ที่ r + 1

พจน์ที่ r + 1 คือ $C_{n,r}a^{n-r}b^r = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}a^{n-r}b^r$

ตัวอย่างที่ 4 จงใช้สูตรทวินาม หาพจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(\frac{1}{2}a + 2b)^8$

วิธีทำ พจน์ที่ r + 1 คือ $C_{n,r}a^{n-r}b^r$

ดังนั้น พจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(\frac{1}{2}a + 2b)^8$ คือ

$$C_{8,4}(\frac{1}{2}a)^{8-4}(2b)^4 = \frac{8!}{4!4!}(\frac{1}{16}a^4 \times 16b^4)$$

$$= 70a^4b^4$$

นั่นคือ พจน์ที่ 5 ของการกระจายคือ $70a^4b^4$

ตรวจสอบความก้าวหน้า 11

จงใช้สูตรทวินาม หาพจน์ที่ 4 ของการกระจาย $(2c+d)^{10}$

พจน์ที่ 4 คือ $\binom{10}{3}(2c)^7(d)^3 = 120(128)c^7d^3$

$= 15,360 \; c^7d^3$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงเขียนรูปสามเหลี่ยมของปาสกาลต่อไปอีก 3 บรรทัด แล้วใช้สามเหลี่ยมของปาสกาลหา $(a+b)^7$

สามเหลี่ยมของปาสกาล

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

2. เขียนในรูปกระจาย โดยใช้สูตรทวินาม

1) $(a+2)^5$

$$(a+2)^5 = \binom{5}{0}a^5+\binom{5}{1}a^4(2)+\binom{5}{2}a^3(2^2)+\binom{5}{3}a^2(2)^3+\binom{5}{4}a(2)^4+\binom{5}{5}(2)^5$$

$$= a^5+10a^4+40a^3+80a^2+80a+32$$

2) $(x+y)^8$

$$(x+y)^8 = \binom{8}{0}x^8+\binom{8}{1}x^7y+\binom{8}{2}x^6y^2+\binom{8}{3}x^5y^3+\binom{8}{4}x^4y^4+\binom{8}{5}x^3y^5+\binom{8}{6}x^2y^6 + \binom{8}{7}xy^7+\binom{8}{8}y^8$$

$$= x^8+8x^7y+28x^6y^2+56x^5y^3+70x^4y^4+56x^3y^5+28x^2y^6+8xy^7+y^8$$

3) $(x-y)^{10}$

$$(x-y)^{10} = \binom{10}{0}x^{10}+\binom{10}{1}x^9(-y)+\binom{10}{2}x^8(-y)^2+\binom{10}{3}x^7(-y)^3+\binom{10}{4}x^6(-y)^4+\binom{10}{5}x^5(-y)^5+\binom{10}{6}x^4(-y)^6+\binom{10}{7}x^3(-y)^7+\binom{10}{8}x^2(-y)^8+\binom{10}{9}x(-y)^9+\binom{10}{10}(-y)^{10}$$

$$= x^{10}-10x^9y+45x^8y^2-120x^7y^3+210x^6y^4-252x^5y^5+210x^4y^6-120x^3y^7+45x^2y^8-10xy^9+y^{10}$$

4) $(x-2)^5$

$$(x-2)^5 = \binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4(-2)+\binom{5}{2}x^3(-2)^2+\binom{5}{3}x^2(-2)^3+\binom{5}{4}x(-2)^4+\binom{5}{5}(-2)^5$$

$$= x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$$

5) $(a-\frac{1}{2}b)^6$

$$(a-\frac{1}{2}b)^6 = \binom{6}{0}a^6+\binom{6}{1}a^5(-\frac{1}{2}b)+\binom{6}{2}a^4(-\frac{1}{2}b)^2+\binom{6}{3}a^3(-\frac{1}{2}b)^3+\binom{6}{4}a^2(-\frac{1}{2}b)^4+\binom{6}{5}a(-\frac{1}{2}b)^5+\binom{6}{6}(-\frac{1}{2}b)^6$$

$$= a^6-3a^5b+\frac{15}{4}a^4b^2-\frac{5}{2}a^3b^3+\frac{15}{16}a^2b^4-\frac{3}{16}ab^5+\frac{1}{64}b^6$$

6) $(\frac{1}{2}a-b)^6$

$$(\frac{1}{2}a-b)^6 = \binom{6}{0}(\frac{1}{2}a)^6+\binom{6}{1}(\frac{1}{2}a)^5(-b)+\binom{6}{2}(\frac{1}{2}a)^4(-b)^2+\binom{6}{3}(\frac{1}{2}a)^3(-b)^3+\binom{6}{4}(\frac{1}{2}a)^2(-b)^4+\binom{6}{5}(\frac{1}{2}a)(-b)^5+\binom{6}{6}(-b)^6$$

$$= \frac{1}{64}a^6-\frac{3}{16}a^5b+\frac{15}{16}a^4b^2-\frac{5}{2}a^3b^3+\frac{15}{4}a^2b^4-3ab^5+b^6$$

7) $(2x+\frac{1}{2}y)^6$

$$\begin{aligned}(2x+\frac{1}{2}y)^6 &= \binom{6}{0}(2x)^6+\binom{6}{1}(2x)^5(\frac{1}{2}y)+\binom{6}{2}(2x)^4(\frac{1}{2}y)^2+\binom{6}{3}(2x)^3(\frac{1}{2}y)^3+\\ &\quad \binom{6}{4}(2x)^2(\frac{1}{2}y)^4+\binom{6}{5}(2x)(\frac{1}{2}y)^5+\binom{6}{6}(\frac{1}{2}y)^6\\ &= 64x^6+96x^5y+60x^4y^2+20x^3y^3+\frac{15}{4}x^2y^4+\frac{3}{8}xy^5+\frac{1}{64}y^6\end{aligned}$$

8) $(4x-\frac{1}{2}y)^6$

$$\begin{aligned}(4x-\frac{1}{2}y)^6 &= \binom{6}{0}(4x)^6+\binom{6}{1}(4x)^5(-\frac{1}{2}y)+\binom{6}{2}(4x)^4(-\frac{1}{2}y)^2+\binom{6}{3}(4x)^3(-\frac{1}{2}y)^3+\\ &\quad \binom{6}{4}(4x)^2(-\frac{1}{2}y)^4+\binom{6}{5}(4x)(-\frac{1}{2}y)^5+\binom{6}{6}(-\frac{1}{2}y)^6\\ &= 4{,}096x^6-3{,}072x^5y+960x^4y^2-160x^3y^3+15x^2y^4-\frac{3}{4}xy^5+\frac{1}{64}y^6\end{aligned}$$

3. จงหาพจน์ตามที่ระบุในแต่ละข้อ

1) จงหาพจน์ที่ 4 ของการกระจายของ $(3x+y)^{10}$

พจน์ที่ 4 คือ $\binom{10}{3}(3x)^7(y)^3 = (120 \times 2{,}187)x^7y^3$

$= 262{,}440\ x^7y^3$

2) จงหาพจน์ที่ 4 ของการกระจายของ $(3x-y)^{10}$

พจน์ที่ 4 คือ $\binom{10}{3}(3x)^7(-y)^3 = -(120 \times 2{,}187)x^7y^3$

$= -262{,}440\ x^7y^3$

3) จงหาพจน์ที่ 6 ของการกระจายของ $(x+3y)^{10}$

พจน์ที่ 6 คือ $\binom{10}{5}x^5(3y)^5 = (252 \times 243)x^5y^5$

$= 61{,}236\ x^5y^5$

4) จงหาพจน์ที่ 6 ของการกระจายของ $(x-3y)^{10}$

พจน์ที่ 6 คือ $\binom{10}{5}x^5(-3y)^5 = -(252 \times 243)x^5y^5$

$= -61{,}236\ x^5y^5$

5) จงหาพจน์ที่ 4 ของการกระจายของ $(6x+\frac{1}{3}y)^{10}$

พจน์ที่ 4 คือ $\binom{10}{2}(6x)^8(\frac{1}{3}y)^5 = (45 \times 186{,}624)x^8y^2$

$= 8{,}398{,}080\ x^8y^2$

6) จงหาพจน์ที่ 4 ของการกระจายของ $(6x - \frac{1}{3}y)^{10}$

พจน์ที่ 4 คือ $\binom{10}{7}(6x)^{8}(-\frac{1}{3}y)^{5} = -(120 \times \frac{8}{81}x^{3}y^{7}$

$= -\frac{320}{27}x^{3}y^{7}$

4. คำนวณ (1.01)12 ให้ได้ทศนิยมสี่ตำแหน่ง โดยใช้สูตรทวินาม

(แนะนำ : 1.01 = 1 + 0.01)

$$(1.01)^{12} = (1+0.01)^{12} = \binom{12}{0}1+\binom{12}{1}(0.01)+\binom{12}{2}(0.01)^{2}+\binom{12}{3}(0.01)^{3}+\binom{12}{4}(0.01)^{4}+\binom{12}{5}(0.01)^{5}+\binom{12}{6}(0.01)^{6}+\ldots+\binom{12}{12}(0.01)^{12}$$

$$\approx 1+12(0.01)+66(0.0001)+220(0.000001)+495(0.00000001)$$

$$\approx 1+0.12+0.0066+0.00022+0.00000495$$

$$\approx 1.1268$$

5. คำนวณ(0.99)12 ให้ได้ทศนิยมสี่ตำแหน่ง โดยใช้สูตรทวินาม

(แนะนำ : 10.99 = 1 - 0.01)

$$(0.99)^{12} = (1-0.01)^{12} = \binom{12}{0}1-\binom{12}{1}(0.01)+\binom{12}{2}(0.01)^{2}-\binom{12}{3}(0.01)^{3}+\binom{12}{4}(0.01)^{4}-\binom{12}{5}(0.01)^{5}+\binom{12}{6}(0.01)^{6}$$

$$= 1-0.12+0.0066-0.00022+0.00000495$$

$$\approx 0.8864$$

6. จงแสดงว่า $2n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

(แนะนำ : กระจาย $(1+1)^{n}$)

$$2^{n} = (1+1)^{n} = \binom{n}{0}1^{n}+\binom{n}{1}1^{n-1}.1+\binom{n}{2}1^{n-2}.1^{2}+\binom{n}{3}1^{n-3}.1^{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}1.1^{n-1}+\binom{n}{n}1^{n}$$

$$= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$