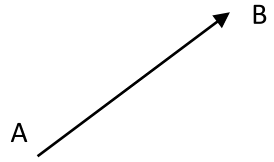
เวกเตอร์

4.1 เวกเตอร์ในแง่ที่เป็นภาพ

4.1.1 ลักษณะของเวกเตอร์



จุด A เรียกว่า จุดเริ่มต้น

จุด B เรียกว่า จุดสิ้นสุด

ถ้าให้ A และ B เป็นจุดในระนาบ ถ้าเราต้องการศึกษาทั้งขนาดและทิศทางของ AB สิ่งที่เราศึกษานั้น เรียกว่า เวกเตอร์

4.1.2 การเท่ากันของเวกเตอร์

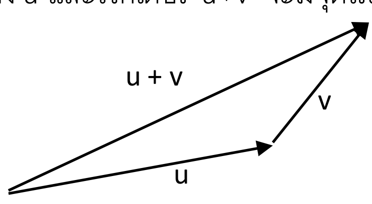
เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและและมีทิศทางเดียวกัน

จากภาพ เวกเตอร์ทั้งสี่มีต่างก็เป็นเวกเตอร์ที่เท่ากัน สามารถนำไปใช้แทนกันได้

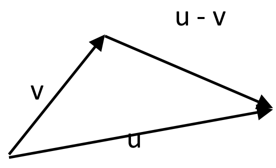
ถ้าสังเกตให้ดีจะพบว่า เวกเตอร์ที่เท่ากันไม่จำเป็นต้องมีจุดเริ่มต้นเป็นจุดเดียวกัน ขอให้มีทิศทางเดียวกัน และขนาดเท่ากัน

4.1.3 การบวก ลบ เวกเตอร์

u+v คือ เวกเตอร์ที่เกิดจากการนำเวกเตอร์ u และ v มาต่อกัน โดยที่จุดเริ่มต้นของ v อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ u และเวกเตอร์ u+v จะมีจุดเริ่มต้นของ u และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จดสิ้นสุดของ v



การบวกเวกเตอร์



การลบเวกเตอร์

การลบเวกเตอร์ เวกเตอร์ที่เป็นผลลบก็คือ เวกเตอร์ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่เกิดจาก u กับ v ซึ่งมีจุดเริ่มต้นร่วมกัน

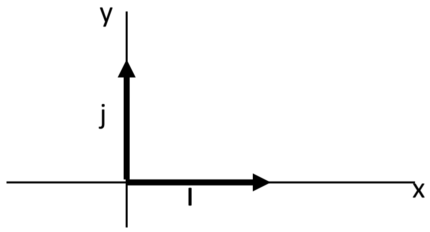
4.2 เวกเตอร์ในแง่สัญลักษณ์

4.2.1 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือ เวกเตอร์ที่มีความยาวหรือขนาดเท่ากับหนึ่งหน่วย

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตามแกน x เราใช้สัญลักษณ์ i แทนเวกเตอร์ดังกล่าว

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตามแกน y เราใช้สัญลักษณ์ j แทนเวกเตอร์ดังกล่าว

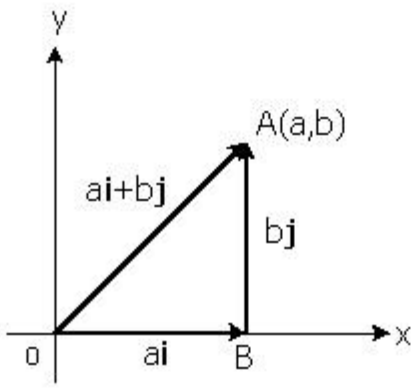


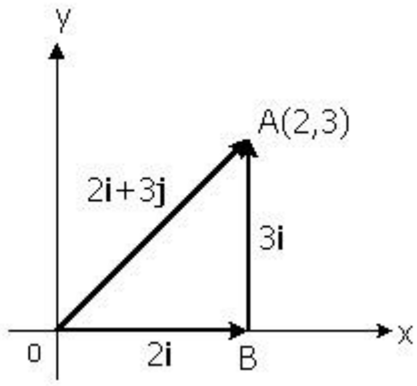
กรณีที่มีตัวเลขหน้าเวกเตอร์หน่วย เช่น 3i หมายถึง เวกเตอร์มีขนาด 3 หน่วยหรือ 3 เท่าของเวกเตอร์หน่วยที่มีทิศตามแนวแกน x

4.3 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

เราจะสร้างเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากในรูปของเวกเตอร์ i กับ j

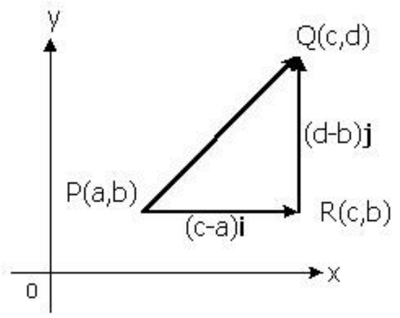
4.3.1 ถ้าเวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิดและสิ้นสุดที่ (a,b)

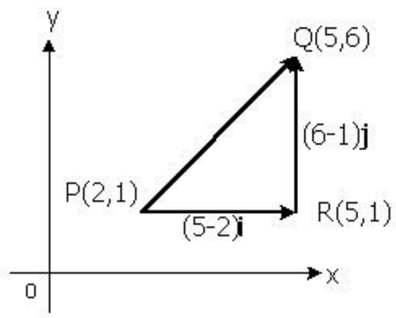




จะได้เวกเตอร์ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = a\vec{i} + b\vec{j}$

4.3.2 ถ้าเวกเตอร์ดังกล่าวมีจุดเริ่มต้นที่ไม่ใช่จุดกำเนิด





$$\overline{P}\vec{Q} \quad = \quad \overline{P}\vec{R} + \overline{R}\vec{Q} \quad = \quad (c-a)\vec{i} + (d-b)\vec{j}$$

ตัวอย่าง หาเวกเตอร์จากจุด P(2,1) ไปยังจุด Q(5,6)

$$\overline{P}\vec{Q} \quad = \quad \overline{P}\vec{R} + \overline{R}\vec{Q} \quad = \quad (5-2)\vec{i} + (6-1)\vec{j} \quad = \quad 3\vec{i} + 5\vec{j}$$

4.4 ขนาดของเวกเตอร์

ถ้าให้ $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ เขียนแทนด้วย $|\vec{A}|$ โดยที่

$$|\vec{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ตัวอย่าง ถ้า $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ = $|\vec{A}| \quad = \quad \sqrt{3^2 + 4^2} \quad = \quad \sqrt{25} \quad = \quad 5$

4.5 การหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ใด ๆ

ถ้าให้ $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ $\vec{A}$ หาได้จาก

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{A} \quad = \quad \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

ตัวอย่าง $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{A} \quad = \quad \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \dfrac{3\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{3\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{25}} = \dfrac{3}{5}\vec{i} + \dfrac{4}{5}\vec{j}$

4.6 การเท่ากันของเวกเตอร์

ถ้า $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$ และ $\vec{B} = c\vec{i} + d\vec{j}$

$\vec{A} = \vec{B}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

4.7 การบวกและลบเวกเตอร์

ถ้า $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$ และ $\vec{B} = c\vec{i} + d\vec{j}$

$$\vec{A} + \vec{B} = (a + c)\vec{i} + (b + d)\vec{j}$$
$$\vec{A} - \vec{B} = (a - c)\vec{i} + (b - d)\vec{j}$$

4.8 การคูณเวกเตอร์

4.8.1 การคูณเวกเตอร์กับปริมาณสเกลาร์

ถ้า $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $\vec{B} = c\vec{i} + d\vec{j}$ และ k เป็นค่าคงที่ใดๆ ที่เป็นปริมาณสเกลาร์

$$k\vec{A} = k\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right) = ka\vec{i} + kb\vec{j}$$
$$k\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = k\vec{A} + k\vec{B}$$

4.8.2 การคูณเวกเตอร์กับเวกเตอร์

4.8.2.1 ผลคูณสเกลาร์ (scalar product) หรือ dot product

ถ้า $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$ และ $\vec{B} = c\vec{i} + d\vec{j}$

ผลคูณสเกลาร์ หาได้จาก

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ac + bd \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

โดย θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ กับเวกเตอร์ $\vec{B}$

ตัวอย่าง ให้ $\vec{A} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ และ $\vec{B} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ หามุม θ ระหว่าง $\vec{A}$ กับเวกเตอร์ $\vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2)(6) + (4)(2) = 20$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \qquad \text{และ} \qquad |\vec{B}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

จาก

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$20 = \left(\sqrt{20}\right)\left(\sqrt{40}\right)\cos\theta \quad = \quad 10\sqrt{8}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{20}{10\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{8}} \qquad \text{ดังนั้น} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right) = 45^\circ$$

4.8.2.2 ผลคูณเวกเตอร์ (vector product) หรือ cross product

ถ้า $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$ และ $\vec{B} = c\vec{i} + d\vec{j}$

ขนาดของผลคูณ เวกเตอร์หาได้จาก

$$\left|\vec{A}\, X\, \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta$$